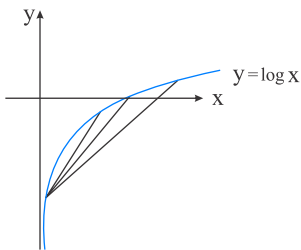




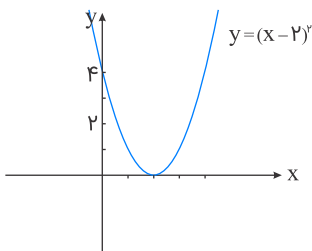
گزینه ۱

۱

الف) آهنگ متوسط در یک بازه می‌تواند از آهنگ لحظه‌ای در نقاط آن بازه (= شیب منحنی در آن نقاط) کمتر یا بیشتر باشد.  
 ب) تابع  $y = \log x$  یک تابع صعودی است اما آهنگ تغییر متوسط آن نزولی است.



پ) شکل زیر یک تابع است که  $f'(2) = 0$  و  $f(2) = 0$  است.



گزینه ۴

۲

از گفته سؤال می‌فهمیم که:  $f'(1) = 4$   
 حد داده شده را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1+h)}{h^2 - 2h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1+h)}{h(h-2)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1+h)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h-2} = (-1-1)f'(1) \times \frac{1}{-2} = f'(1) = 4 \end{aligned}$$

نکته: اگر  $f$  در نقطه  $a$  مشتق‌پذیر باشد، داریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+nh) - f(a+mh)}{h} = (n-m)f'(a)$$

$$f(x^2 f(x)) \xrightarrow{\text{مشتق}} (x^2 f(x))' f'(x^2 f(x)) = (2xf(x) + x^2 f'(x)) f'(x^2 f(x))$$

$$\downarrow$$

$$x=1$$

$$= (2f(1) + f'(1)) f'(f(1))$$

چون  $f(x) = x\sqrt{x}$ ، پس  $f(1) = 1$  است. داریم:

$$(f(x^2 f(x)))' = (2 + f'(1)) \times f'(1)$$

$f'(1)$  را می‌خواهیم:

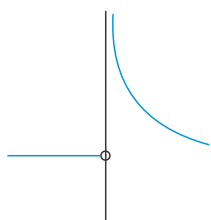
$$f(x) = x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(1) = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow (f(x^2 f(x)))' = \left(2 + \frac{3}{2}\right) \times \frac{3}{2} = \frac{7}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{21}{4}$$

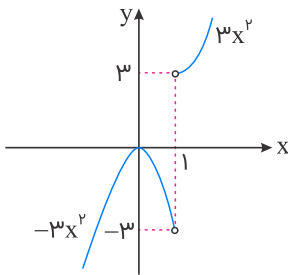
$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[3]{x-1}(1) - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = +\infty$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt[3]{x-1}(0) - 0}{x - 1} = 0$$

مشتق راست برابر  $+\infty$  و مشتق چپ تابع صفر است.



$$y = |x^3 - 1| = \begin{cases} x^3 - 1 & ; x \geq 1 \\ -x^3 + 1 & ; x < 1 \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} 3x^2 & ; x > 1 \\ -3x^2 & ; x < 1 \end{cases}$$



چون شیب خط مماس در نقطه  $x = \frac{2}{3}$  برابر با صفر است، بنابراین مشتق تابع در این نقطه باید صفر شود:

$$f(x) = (a - bx)^3 - a \Rightarrow f'(x) = -3b(a - bx)^2$$

$$\xrightarrow{x=\frac{2}{3}} f'\left(\frac{2}{3}\right) = -3b\left(a - b\left(\frac{2}{3}\right)\right)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} -3b = 0 \Rightarrow b = 0 \\ a - b\left(\frac{2}{3}\right) = 0 \Rightarrow a = \frac{2}{3}b \end{cases}$$

به علاوه مقدار تابع در  $x = 0$  برابر ۶ است.

$$f(x) = (a - bx)^3 - a \xrightarrow{x=0} f(0) = a^3 - a = 6 \Rightarrow a = 2$$

اگر  $a = 2$  باشد آنگاه  $b = 3$  می‌شود، در نتیجه  $a + b = 5$  است.

اگر حد را مرتب کنیم، داریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{2h} \times \frac{2}{1} = 6 \Rightarrow 2f'(1) = 6 \Rightarrow f'(1) = 3$$

یعنی شیب خط مماس بر منحنی  $f$  برابر با ۳ است و شیب خط  $y = x$  نیز برابر با ۱ است؛ بنابراین  $m$  یعنی شیب خط  $y = mx$  عددی بین ۱ و ۳ است.

$$f(x) = g(\sqrt[3]{x}) \Rightarrow f'(x) = g'(\sqrt[3]{x}) \times \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

x را برابر ۸ قرار می‌دهیم:

$$f'(\lambda) = g'(\sqrt[3]{\lambda}) \times \frac{1}{3\sqrt[3]{(\lambda)^2}}$$

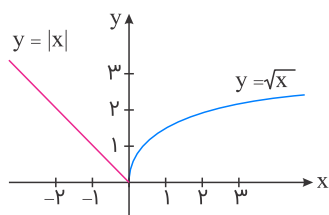
ازطرفی:

$$g'(\sqrt[3]{\lambda}) = g'(2) = \frac{4+4}{2} = 4$$

بنابراین:

$$f'(\lambda) = 4 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$$

ابتدا نمودار تابع  $f(x)$  را رسم می‌کنیم. داریم:



تابع در  $x = 0$  نقطه گوشه‌ای است، پس گزینه‌های "۱" و "۳" نمی‌توانند درست باشند. چون مشتق راست تابع  $f$  در  $x = 0$  موجود نیست (مشتق راست برابر  $+\infty$  است)، گزینه "۲" هم نمی‌تواند صحیح باشد.

$$f'_+(0) : (\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x=0^+} \frac{1}{0^+} = +\infty$$

بنابراین تنها گزینه "۴" صحیح می‌باشد و تابع  $f$  در  $x = 0$  نقطه گوشه‌ای است.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) - f(1)}{h} = \frac{f(1) - f(1)}{0}$$

برای اینکه حاصل حد  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) - f(1)}{h}$  موجود باشد، باید  $f(1) = 0$  باشد، پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \overbrace{f(1)}^0}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \times \frac{1}{x + 1}$$

باتوجه به تعریف مشتق داریم:

$$f'(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \times \frac{1}{x + 1} = f'(1) \times \frac{1}{2} = \frac{-1}{2} \Rightarrow f'(1) = -1$$

حاصل  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) - f(1)}{h}$  را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) - f(1)}{h} = -2f'(1) = -2 \times (-1) = 2$$

حد داده شده را ساده تر می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{-2(x - 4)} = \frac{-1}{2} \times f'(4)$$

از تابع  $f$  مشتق می‌گیریم.

$$f(x) = x \sqrt{\frac{2x+1}{x-3}} \Rightarrow f'(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x-3}} + x \cdot \frac{\frac{-1}{(x-3)^2}}{\frac{2}{2\sqrt{\frac{2x+1}{x-3}}}}$$

$$\Rightarrow f'(4) = 3 + 4 \times \frac{-1}{6} = 3 - \frac{14}{3} = \frac{-5}{3}$$

پس مقدار حد داده شده برابر است با:

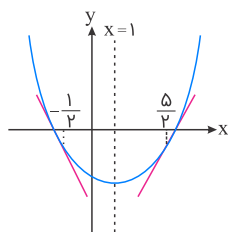
$$\frac{-1}{2} \times \frac{-5}{3} = \frac{5}{6}$$

$$\begin{aligned}
 f(x) + g(x) &= \log(\sqrt{x^2 + 2} - x) + \log(\sqrt{x^2 + 2} + x) \\
 &= \log(x^2 + 2 - x^2) = \log 2 \\
 f(x) + g(x) &= \log 2
 \end{aligned}$$

از طرفین تساوی بالا مشتق می‌گیریم:

$$f'(x) + g'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = -g'(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{g'(x)} = -1 \Rightarrow \frac{f'(2)}{g'(2)} = -1$$

در تابع درجه دو، نقاطی که نسبت به محور تقارن سهمی (خط  $x = -\frac{b}{2a}$ ) مشتقشان قرینه هم است. در تابع  $f(x) = x^2 - 2x - 2$ ، معادله محور تقارن، خط  $x = 1$  است؛ پس باید دنبال اعدادی باشیم که میانگینشان ۱ می‌شود. این ویژگی فقط در اعداد گزینه (۳) وجود دارد.



$$\begin{aligned}
 \text{آهنگ متوسط تغییر} &= \frac{f(9) - f(1)}{9 - 1} = \frac{3 - 1}{9 - 1} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \\
 \text{آهنگ لحظه‌ای تغییر} &= f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

چون آهنگ متوسط و لحظه‌ای برابر شده‌اند، پس اختلاف صفر است.

$$\left. \begin{aligned}
 \text{آهنگ متوسط} : \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} &= \frac{60 - 0}{3} = 20 \\
 \text{آهنگ لحظه‌ای در } a : f'(x) &= 3x^2 - 1 \Rightarrow f'(a) = 3a^2 - 1
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3a^2 - 1 = 20 \Rightarrow a = \sqrt{7}$$

نکته: تابع  $\sqrt[3]{f(x)}$  در ریشه ساده  $f$  دارای مماس قائم است.

نکته: تابع  $f(x)$  دارای مماس قائم است هرگاه  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  برابر با  $+\infty$  یا  $-\infty$  گردد.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2} = \sqrt[3]{x^3 - x - 2x + 2} = \sqrt[3]{x(x^2 - 1) - 2(x - 1)} \\ &= \sqrt[3]{x(x - 1)(x + 1) - 2(x - 1)} = \sqrt[3]{(x - 1)(x^2 + x - 2)} = \sqrt[3]{(x - 1)^2(x + 2)} \end{aligned}$$

پس طبق نکته  $f$  در  $x = -2$  دارای مماس قائم است.

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 3}{3\sqrt[3]{(x^3 - 3x + 2)^2}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-2)} f'(x) = \frac{9}{\sqrt[3]{0^+}} = +\infty$$

شیب خط مماس در هر نقطه روی نمودار بیانگر مشتق تابع در آن نقطه است.

مشتق تابع  $f$  در نقاط  $B$  و  $E$  عددی مثبت است؛ چراکه شیب در این نقاط مثبت است.

اندازه شیب خط در نقطه  $C$  از  $D$  بزرگتر است و چون هر دو شیبهای منفی دارند، پس  $C$  کمترین مقدار مشتق را بین نقاط داده شده دارد.

$$\begin{aligned} \text{آهنگ متوسط در } [1, 5] &= \frac{m(5) - m(1)}{5 - 1} \\ &= \frac{\sqrt{2(5)} - 1 + 3(5) - (\sqrt{2(1)} - 1 + 3)}{4} = \frac{3 + 15 - (4)}{4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای رشد: } m'(t) = \frac{2}{2\sqrt{2t-1}} + 3 = \frac{1}{\sqrt{2t-1}} + 3 = \frac{7}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2t-1}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{2t-1} = 2 \Rightarrow 2t-1 = 4 \Rightarrow 2t = 5 \Rightarrow t = \frac{5}{2} = 2.5$$

نکته: اگر در تابع  $y = f(x) \times g(x)$  مقدار  $f(x)$  در  $x = a$  صفر شود (عامل صفرشونده)، آنگاه:

$$y'(a) = f'(a) \times g(a)$$

باتوجه به ضابطه  $y = \frac{(x-2)^2}{\sqrt{ax^2+1}}$  و همچنین نکته عامل صفرشونده، داریم:

$$y' = 2(x-2) \times \frac{1}{\sqrt{ax^2+1}}$$

همچنین باتوجه به اینکه هنوز عامل صفرشونده موجود است، بنابراین می‌توان برای مشتق دوم نیز از همین ضابطه دوباره مشتق گرفت:

$$y'' = 2 \times \frac{1}{\sqrt{ax^2+1}} \xrightarrow{x=2} 1 = 2 \times \frac{1}{\sqrt{a(2)^2+1}} \Rightarrow \sqrt{4a+1} = 2$$

$$\Rightarrow 4a+1=4 \Rightarrow a=\frac{3}{4}$$

نقطه  $(a, f(a))$  در خط  $d$  صدق می‌کند و شیب آن در این نقطه  $f'(a)$  است.

$$f'(x) = 6x - 2$$

معادله خطی که شیب  $m$  داشته باشد و از نقطه  $(x_0, y_0)$  عبور کند از رابطه  $y - y_0 = m(x - x_0)$  به دست می‌آید؛ درنتیجه داریم:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \Rightarrow y - (3a^2 - 2a + 1) = (6a - 2)(x - a) \\ \Rightarrow y = (6a - 2)x - 3a^2 + 2a + 3a^2 - 2a + 1 \Rightarrow y = (6a - 2)x - 3a^2 + 1$$

عرض از مبدأ این خط  $-3a^2 + 1$  است که آن را برابر با  $-11$  قرار می‌دهیم:

$$-3a^2 + 1 = -11 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ \text{یا} \\ a = -2 \end{cases}$$



عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{(f \circ g)'(x)}{(f' \circ g)(x)} = \frac{f'(g(x)) \times g'(x)}{f'(g(x))} = g'(x)$$

$g'$  را حساب می‌کنیم:

$$g(x) = \sqrt{2x+1} \Rightarrow g'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

با جایگذاری  $x = 4$ ، داریم:

$$g'(4) = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h)^2 - 2(x+h) - 1 - 3x^2 + 2x + 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(6x - 2) + 3h^2}{h} = (6x - 2) + \lim_{h \rightarrow 0} 3h = 6x - 2 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)f'(x)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(3x+1)}{(x-1)(6x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+1}{6x-2} = \frac{4}{4} = 1 \end{aligned}$$

معادله  $f$  با نقاط  $(2, 0)$  و  $(0, 4)$  برابر است با:

$$m = \frac{4 - 0}{0 - 2} = -2 \Rightarrow y - 0 = -2(x - 2) \Rightarrow f(x) = -2x + 4$$

در فاصله  $-1$  تا  $3$  معادله  $g$  با نقاط  $(-1, 0)$  و  $(3, 4)$  برابر است با:

$$m = \frac{4 - 0}{3 - (-1)} = 1 \Rightarrow y - 0 = 1(x + 1) \Rightarrow g(x) = x + 1$$

$$(f \circ g)'(2) = g'(2) \times f'(g(2)) = 1 \times (-2) = -2$$

نکته: توابع رادیکالی با فرجه فرد، در تمام ریشه‌های زیر رادیکال (به شرط آنکه بعد از ساده کردن، ریشه عبارت پشت رادیکال نشود) قطعاً مشتق‌ناپذیر است.

اگر عبارت زیر رادیکال با فرجه فرد، یعنی عبارت  $x^2 + mx - m$  ریشه (ساده یا مضاعف) داشته باشد، آنگاه تابع  $f$  در این ریشه مشتق‌ناپذیر است و این با شرط صورت مسئله در تضاد می‌باشد. پس باید عبارت زیر رادیکال دارای ریشه حقیقی نباشد. داریم:

$$\Delta < 0 \Rightarrow m^2 + 4m < 0 \Rightarrow -4 < m < 0$$

ابتدا عرض نقطه  $x = 2$  را به دست می‌آوریم:

$$f(2) = \frac{1+4}{2-1} = 5$$

$$\text{شیب خط مماس: } f'(x) = \frac{(2x)(x-1) - (1+x^2)}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(2) = \frac{4(1) - (5)}{1} = -1$$

$$\text{معادله خط مماس: } y - 5 = -1(x - 2) \Rightarrow y = -x + 7$$

محل برخورد آن با نیمساز ربع اول و سوم برابر است با:

$$\begin{cases} y_1 = -x + 7 \\ y_2 = x \end{cases} \Rightarrow -x + 7 = x \Rightarrow 2x = 7 \Rightarrow x = 7/2 \Rightarrow y = 7/2$$

عرض نقطه تلاقی  $3/5 \Rightarrow y = 3/5$

شیب هر نقطه مانند  $x = k$  برابر  $m = f'(x) = 6x^2 + 12x - 3$  است.

در  $f'(x)$  مقدار  $a$  بزرگ‌تر از صفر است، بنابراین دهانه سهمی روبه بالا می‌باشد؛ در نتیجه نقطه‌ای که کمترین شیب را دارد، همان رأس سهمی است.

$$\text{پس به ازای } x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2 \times 6} = -1 \text{ است.}$$

حال عرض نقطه‌ای به طول  $-1$  را به دست می‌آوریم:

$$f(-1) = 2(-1)^3 + 6(-1)^2 - 3(-1) + 1 = 8$$

در هر سهمی  $y = ax^2 + bx + c$  شیب خطوط مماس بر نمودار در نقاط با عرض یکسان قرینه‌اند. این نقاط نسبت به خط محور تقارن سهمی یعنی  $x = 2$  قرینه‌اند. خط  $x = 2$  معادله محور تقارن سهمی است. چون  $x = 5$  و  $x = -1$  نسبت به خط  $x = 2$  به یک فاصله‌اند، لذا شیب در آن‌ها قرینه یکدیگر و جمع شیب‌ها صفر است. (هر دو نقطه با  $x = 2$  سه واحد اختلاف دارند)

پس  $x = 2$  طول رأس سهمی است که مماس در آن افقی و شیب صفر می‌باشد. خط افقی مماس بر سهمی، موازی خط افقی  $y = 6$  است.

ابتدا شیب خط MN را با داشتن مختصات M و N می‌نویسیم:

$$m_{MN} = \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = \frac{1\sqrt{10} - 6\sqrt{10}}{2\sqrt{5} - x_N} = M \text{ شیب مماس در نقطه} = -\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{10} = -\sqrt{2} (2\sqrt{5} - x_N) \Rightarrow 2\sqrt{10} = -2\sqrt{10} + \sqrt{2}x_N$$

$$4\sqrt{10} = \sqrt{2}x_N \Rightarrow x_N = \frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{5}\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{5}$$

منظور سؤال نقاطی است که علامت تابع و شیب خط مماس بر آن مخالف یکدیگر است.

می‌دانیم اگر تابع بالای محور  $x$ ‌ها باشد، علامت آن مثبت و اگر زیر محور  $x$ ‌ها باشد، علامت آن منفی است. اگر تابع صعودی باشد، مشتق آن مثبت و اگر نزولی باشد، مشتق آن منفی است. بنابر نمودار داده‌شده داریم:

در سه نقطه A، C و E حاصل  $ff' < 0$  برقرار است.

| نقطه      | A    | B | C    | D | E    | F   |
|-----------|------|---|------|---|------|-----|
| علامت f   | +    | - | -    | + | +    | -   |
| علامت f'  | -    | - | +    | + | -    | صفر |
| علامت ff' | -    | + | -    | + | -    | صفر |
|           | جواب |   | جواب |   | جواب |     |

مشتق تابع  $f \circ f(x)$  در  $x = 1$  برابر است با:

$$(f \circ f(x))' = f'(x) \cdot f'(f(x)) \xrightarrow{x=1} f'(1) \cdot f'(f(1))$$

حال باتوجه به رابطه  $2f(2x-1) = f(x) + 5x^2 - 4x$  با جایگذاری  $x = 1$  داریم:

$$\xrightarrow{x=1} 2f(1) = f(1) + 1 \Rightarrow f(1) = 1$$

ازطرفی با مشتق‌گیری از رابطه بالا و جایگذاری  $x = 1$ ، داریم:

$$2(2f'(2x-1)) = f'(x) + 10x - 4$$

$$\xrightarrow{x=1} 4f'(1) = f'(1) + 6 \Rightarrow 3f'(1) = 6 \Rightarrow f'(1) = 2$$

بنابراین حاصل  $f'(1) \cdot f'(f(1))$  برابر است با:

$$f'(1) \cdot \underbrace{f'(f(1))}_1 = f'(1) \cdot f'(1) = 2 \times 2 = 4$$